TD n°9: Représentations conformes et révisions

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

Représentations conformes.

Exercice 1. Des équivalences conformes.
On note $S_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \alpha\}$ où $0 < \alpha \leqslant \pi$. Démontrer que les fonctions holomorphes suivantes sont des équivalences conformes, et expliciter leurs inverses :

1. La réciproque est $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ par les faits généraux sur les homographies (voir TD 2), elle envoie clairement $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{D}$ car si $z = x + iy$, $y > 0$, alors $|z-i|^2 = x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2 = |z+i|^2$.

2. Sur S_α (et même S_π tout entier), $z \mapsto z^\beta$ est donnée par $e^{\beta \log(z)}$, où $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$ désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0}$, qui vérifie $e^{\log(z)} = z$ pour tout z et $\log(e^z) = z$ pour $|\Im(z)| < \pi$.
   Ainsi, $\left(z^\beta\right)^{1/\beta} = e^{\frac{1}{\beta}\log(z^\beta)}$. Comme on a $\Im(\log(z)) < \alpha$ pour $z \in S_\alpha$, on a $\Im(\beta\log(z)) < \alpha\beta \leqslant \pi$ et donc $\log(z^\beta) = \beta\log(z)$. Il en découle que $\left(z^\beta\right)^{1/\beta} = z$. En échangeant les rôles de β et $\frac{1}{\beta}$, on a la réciproque.

3. Calculons formellement l'inverse : on pose $w = \frac{z}{(1-z)^2}$, ce qui donne $wz^2 - 2wz + w - z = 0$.
   Le discriminant de cette équation est $4w + 1$, et les solutions formelles sont donc $\frac{2w+1\pm\sqrt{4w+1}}{2w}$. Il faut maintenant trouver le bon "branch cut", c'est-à-dire donner un sens précis à $\sqrt{4w+1}$.
   Pour ce faire, on peut remarquer que $\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Un calcul similaire à celui de la question 1 montre que $\frac{1+z}{1-z}$ envoie $\mathbb{D}$ sur le demi-plan $\Re(z) > 0$, puis que le passage au carré envoie bijectivement $\Re(z) > 0$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0}$, et donc K envoie bijectivement $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$. Pour obtenir sa réciproque, il suffit d'observer la formule $\frac{2w+1\pm\sqrt{4w+1}}{2w}$ et de prendre la détermination de la racine carrée usuelle définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0}$ avec un signe $-$ devant (sinon la fonction n'est pas définie en 0).
   On pose $h : w \mapsto \frac{2w+1-\sqrt{4w+1}}{w}$ et un calcul rapide montre que $h(K(z)) = z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Comme on a établi plus tôt que K était bijective de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$, ceci prouve que h est son inverse.

4. Procédons en deux étapes : $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$ envoie $\mathbb{D}$ sur $\Re(z) > 0$, et log envoie $\Re(z)$ sur $|\Im(z)| < \pi/2$. La réciproque de $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$ est $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$, et la réciproque de $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ est donc $e^{\frac{z-1}{z+1}}$.

5. Encore une fois, trouvons l'inverse formel : on pose $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, ce qui donne $z^2 - 2zw + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $4w^2 - 4$, et la solution est donc donnée par $z = w \pm \sqrt{w^2-1}$. Il n'est pas immédiatement évident que $\sqrt{w^2-1}$ puisse être défini sur $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$, mais on peut définir $\sqrt{w-1}\sqrt{w+1}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 1}$. et $-\sqrt{1-w}\sqrt{-1-w}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geqslant -1}$. Ces deux fonctions élevées au carré donnent $w^2 - 1$, et elles sont donc égales à signe près sur les composantes connexes de l'intersection de leurs domaines, c'est-à-dire $\Im(z) > 0$ et $\Im(z) < 0$. Il suffit donc de vérifier que leurs valeurs coïncident en i et $-i$ pour prouver qu'elles sont égales et se recollent donc en une fonction holomorphe $\sqrt{w^2-1}$ sur $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.
   Pour la racine carrée usuelle, on a $\sqrt{i-1} = i\sqrt{1-i}$ et $\sqrt{1+i} = i\sqrt{-1-i}$. Ainsi, $\sqrt{w-1}\sqrt{w+1}$ et $-\sqrt{1-w}\sqrt{-1-w}$ coïncident en i et en $-i$, et on peut les recoller.
   Il faut finalement décider du signe $\pm$: on remarque que $w - \sqrt{w^2-1}$ est bornée, la réciproque doit donc être $w + \sqrt{w^2-1}$. Un rapide calcul permet de le vérifier.

Exercice 2. Unicité dans le théorème de la représentation conforme.

1. On rappelle que les biholomorphismes de $\mathbb{D}$ sont tous de la forme $\varphi_{a,\theta}(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $a \in \mathbb{D}$. Si $\varphi_{a,\theta}(0) = 0$, alors $a = 0$ et le biholomorphisme est de la forme $z \mapsto e^{i\theta}z$. Sa dérivée en 0 est $e^{i\theta}$, donc la seule possibilité pour que ce soit un réel positif et qu'elle soit égal à 1.

2. Par la formule $(g\circ f)'(u) = g'(f(u))f'(u) = g'(v)f'(u)$, si $g'(v) > 0$ et $f'(u) > 0$ alors $g\circ f$ a une dérivée positive en v. On remarque aussi que si $f(u) = v$, alors $(f^{-1})'(v) = \frac{1}{f'(f^{-1}(v))} = \frac{1}{f'(u)} > 0$. On fixe U, V ouverts, $u \in U$, $v \in V$. On commence par prouver qu'il existe une unique représentation conforme de U sur $\mathbb{D}$ vérifiant $f(u) = 0$, $f'(u) > 0$. Soient f_1, f_2 deux telles représentations conformes, alors $\varphi = f_1 \circ f_2^{-1}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ envoyant 0 sur 0 et vérifiant $\varphi'(0) > 0$, c'est donc l'identité et $f_1 = f_2$. Le même résultat est vrai pour V. Il en découle donc que si f_1, f_2 sont deux biholomorphismes de U vers V envoyant u sur v et de dérivée réelle positive en u, en postcomposant par l'unique biholomorphisme $g : V \to \mathbb{D}$ envoyant v sur 0 et vérifiant $g'(v) > 0$, on trouve deux biholomorphismes $g\circ f_1, g\circ f_2$ qui envoient u sur 0 et ont une dérivée positive en u et sont donc égaux, donc $f_1 = f_2$.

3. Calculer les rayons conformes suivants :

   (a) La représentation conforme de $\mathbb{D}(0, r)$ vers $\mathbb{D}$ que l'on cherche est $z \mapsto z/r$, et le rayon conforme est donc r.
   Pour $R(\mathbb{D}(0, 2), 1)$, commençons par considérer $\mathbb{D}(0, 2) \to \mathbb{D}$, $z \mapsto z/2$: on a $R(\mathbb{D}(0, 2), 1) = 2R(\mathbb{D}, 1/2)$. Il faut alors trouver l'unique biholomorphisme de $\mathbb{D}$ qui envoie $1/2$ sur 0 et a une dérivée en $\frac{1}{2}$ positive : il s'agit de
   $$z \mapsto \frac{2z-1}{2-z}$$
   et sa dérivée est $\frac{3}{(2-z)^2}$, donc en $\frac{1}{2}$ on trouve $R(\mathbb{D}, 1/2) = \frac{3}{4}$, et donc $R(\mathbb{D}(0, 2), 1) = \frac{3}{2}$. $R(\mathbb{D}(0, r), 0)$, $R(\mathbb{D}(0, 2), 1)$

   (b) On a sous la main (de l'exercice 1) la transformation $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$, qui envoie i sur 0, mais sa dérivée est
   $$\frac{2i}{(z+i)^2}.$$
   Pour avoir une dérivée en i positive, il faut donc considérer $z \mapsto \frac{i(z-i)}{z+i}$, et alors $R(\mathbb{H}, i) = 2$.

   (c) L'astuce est de voir la situation dans la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$. On commence par envoyer $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus \overline{\mathbb{D}}$ par $z \mapsto 1/z$. La transformation de Joukowski envoie cet ouvert sur $\mathbb{P}^1 \setminus [-1, 1]$, et une nouvelle application de $z \mapsto 1/z$ envoie cet ouvert sur U. L'équivalence conforme est donc donnée par
   $$z \mapsto \frac{1}{J(1/z)}.$$
   Elle envoie 0 sur 0 (0 est envoyé sur ∞ par $1/z$, puis par ∞ par J, puis sur 0 par $1/z$.), et on peut calculer la dérivée en 0, qui est donnée par
   $$\left.\frac{J'(1/z)}{z^2 J(1/z)^2}\right|_{z=0}.$$
   Comme $J'(1/z) = \frac{1}{2}\left(1 - z^2\right)$ et $z^2 J(1/z)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2z^2 + z^4\right)$, l'évaluation en 0 donne 2, qui est le rayon conforme.

Exercice 3. Représentations conformes entre couronnes.
On pose $C(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.

1. Considérons γ_t le cercle de rayon $1 < t < \rho$, et $A(t) = \sup_{z\in f(\gamma_t)} |z|$. Cette fonction est injective sur $]1, R_1[$, sans quoi les courbes simples $f(\gamma_t)$ et $f(\gamma_s)$ se croiseraient et f ne serait pas injective. Si A est décroissante, on peut considérer R_2/f, ce qui change la monotonie de A, qui sera alors croissante. Reste à voir que $\lim_{t\to 1^+} A(t) = 1$. Dans le cas contraire, on aurait une suite $(t_n)_n$ décroissante convergeant vers 1 telle que $A(t_n) \to 1 + \delta$, et donc une suite $(z_n)_n$, $z_n \in \gamma_{t_n}$, vérifiant $|f(z_n)| \geqslant 1 + \delta$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f(z_n) \to w$, et w vérifie $|w| > 1$ car $|f(z_n)| \geqslant 1 + \delta$ pour tout n.
   Mais alors $z_n = f^{-1}f(z_n)$ converge vers $f^{-1}(w)$, et par continuité de f on devrait avoir $w \in C(1, R_1)$, or $|z_n| = t_n \to 1$ donc z_n ne peut pass converger dans $C(1, R_1)$. On en déduit qu'on a bien $A(t) \to 1$ quand $t \to 1^+$, et le même argument montre que $A(t) \to R_2$ quand $t \to R_1^-$.

2. L'harmonicité de $\log|f| - \frac{\log(R_2)}{\log(R_1)} \log|z|$ est évidente, son annulation au bord découle de la question précédente.

3. On pose $\alpha = \frac{\log(R_2)}{\log(R_1)}$, on a $\log|f| = \alpha \log|z|$ sur $C(1, R_1)$. En prenant un voisinage de 1 où $\log(f)$ est définie, on traduit ça comme $\Re(\log(f)) = \Re(\alpha \log(z))$ et donc $\log(f) = \alpha \log(z) + ib$ où b est une constante. En passant à l'exponentielle, on trouve bien $f(z) = Cz^\alpha$.

4. On va même montrer qu'il n'existe pas de fonction définie au voisinage du cercle de centre 0 et de rayon r qui vérifie $f'/f = \frac{\alpha}{z}$. Supposons qu'une telle fonction existe, et considérons $\phi : \theta \mapsto f(re^{i\theta})$. Sa dérivée est
$$\phi'(\theta) = ire^{i\theta} f'(re^{i\theta}) = ire^{i\theta} \frac{\alpha}{re^{i\theta}} f(re^{i\theta}) = i\alpha\phi(\theta).$$
Il en découle que $\phi(\theta) = Ce^{i\alpha\theta}$, mais si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on a $\phi(2\pi) = Ce^{2i\pi\alpha} \neq C = \phi(0)$ alors que $f(re^{2i\pi}) = f(r)$, c'est une contradiction.

5. D'après la question précédente, tout biholomorphisme $C(1, R_1) \to C(1, R_2)$ doit être de la forme $z \mapsto Cz^{\pm 1}$. Un tel biholomorphisme est forcément de la forme $e^{i\theta} z$ ou $e^{i\theta} R_2/z$ par les conditions au bord déterminées dans la question 1. En l'occurence, on doit donc forcément avoir $R_1 = R_2$.
$C(r, R)$ est toujours biholomorphe à $C(1, R/r)$, donc $C(r_1, R_1)$ est biholomorphe à $C(r_2, R_2)$ si et seulement si $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

6. Décrivons directement une bijection ensembliste entre $\mathbb{T} \times \{\pm 1\}$ et le groupe des biholomorphismes de $C(1, R)$:
$$(\zeta, \varepsilon) \mapsto \varphi_{\zeta,\varepsilon} = z \mapsto \zeta\sqrt{R} \left(\frac{z}{\sqrt{R}}\right)^\varepsilon.$$
Un calcul explicite montre que
$$\varphi_{\zeta',\varepsilon'} \circ \varphi_{\zeta,\varepsilon} = \varphi_{\zeta'\zeta^{\varepsilon'},\varepsilon\varepsilon'}$$
qui est donc bien un produit semi-direct.

Exercice 4. Les polynômes de Faber
Soit K un compact connexe du plan ayant au moins deux points et tel que $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ soit connexe. On suppose pour plus de simplicité que K contient 0.

1. Considérons $\Omega \cup \{\infty\}$ dans la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$: il est simplement connexe (son image par $z \mapsto 1/z$ est un ouvert connexe dont le complémentaire n'a que des composantes connexes non-bornées), et donc biholomorphe à $\mathbb{D}$, on peut même choisir le biholomorphisme de sorte à ce qu'il envoie ∞ sur 0. La restriction de ce biholomorphisme à Ω donne un biholomorphisme $\Omega \to \mathbb{D} \setminus \{0\}$, lequel est biholomorphe à $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ par $z \mapsto 1/z$.

2. C'est la transformation de Joukowski.

3. On sait par construction que $1/\Phi(z)$ envoie l'infini sur 0, ce qui veut dire que Φ a un pôle à l'infini. Reste à voir qu'une fonction ayant un pôle d'ordre > 1 ne peut pas être injective au voisinage du pôle ou, de manière équivalente, qu'une fonction holomorphe qui a un zéro d'ordre > 1 ne peut pas être injective au voisinage de ce zéro.
La raison est le lemme suivant, relativement élémentaire :
Lemme.
Soit f une fonction holomorphe avec un zéro d'ordre n en 0, c'est-à-dire que $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$ et $f^{(n)}(0) \neq 0$. Il existe au voisinage de 0 une racine n-ème de f, c'est-à-dire une fonction g telle que $g(z)^n = f(z)$. De plus, la fonction g est un biholomorphisme au voisinage de 0.
Supposons le lemme vrai : quitte à remplacer $f(z)$ par $f(z-a)$, on peut se ramener à un zéro n'importe où (y compris à l'infini, en remplaçant $f(z)$ par $f(1/z)$). Comme g est un biholomorphisme entre deux voisinages de zéro, elle tous les $\varepsilon\zeta_n^k$, où ε est assez petit et $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Soit z_k l'unique antécédent de ζ_n^k par g : on a $f(z_k) = g(z_k)^n = \varepsilon^n$, et f n'est donc pas injective si $n > 1$.
Reste à prouver le lemme : on écrit $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + ... = a_n z^n (1 - zu(z))$. On choisit une racine n-ème de a_n, disons α. Il suffit ensuite de composer la fonction holomorphe $1 - zu(z)$, qui envoie un voisinage de u_0 au voisinage de 1, avec la fonction racine n-ème, définie au voisinage de 1. On pose $g(z) = \alpha z \sqrt[n]{1 - zu(z)}$, qui vérifie bien $g(z)^n = f(z)$.
Pour voir que f est un biholomorphisme au voisinage de 0, il suffit par le théorème d'inversion locale (Comme la différentielle de l'inverse est l'inverse de la différentielle, l'inverse C^1 d'une fonction holomorphe bijective est holomorphe) de vérifier que $g'(0) \neq 0$, ce qui est clair vu la formule donnée.

4. Dans le cas $K = \overline{\mathbb{D}}(0,r)$, on peut calculer explicitement Φ, qui est donnée par $z \mapsto z/r$, et $F_n(z) = z^n/r^n$.

5. On peut se ramener par Cauchy à un cercle au voisinage de l'infini, sur lequel Φ s'écrit $\Phi(z) = az + b + h(1/z)/z$ avec h série entière convergente. On a donc $\Phi(z)^n = F_n(z) + h_n(1/z)/z$ avec h_n série entière convergente. Prouvons dans un premier temps que
$$\int_{\gamma_R} \frac{h_n(1/\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = 0$$
avec γ_R un cercle de rayon $R >> 0$.
En paramétrant, on trouve
$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} \frac{h_n(1/\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta &= \int_0^{2\pi} \frac{h_n(R^{-1}e^{-i\theta})}{Re^{i\theta}(Re^{i\theta} - z)} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} \frac{h_n(R^{-1}e^{-i\theta})}{Re^{i\theta} - z} d\theta.\end{aligned}$$
Cette dernière intégrale tend vers 0 quand $R \to \infty$, et comme elle est constante, elle vaut 0. Reste à évaluer
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{F_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$
qui vaut $F_n(z)$ par la formule de Cauchy.

6. Partons de l'intégrale à droite et appliquons le théorème des résidus. Les pôles de l'intégrande sont en $\zeta = z$ et en $\zeta = \Psi(w)$. L'astuce ici est d'être malin.e et de considérer γ comme un lacet "dans l'autre sens", autour de l'infini (On considère de le lacet $t \mapsto \frac{1}{\gamma(t)}$, qui a un indice -1 autour de l'infini et aussi a fortiori autour de $\Psi(w)$). On trouve donc, par le théorème des résidus
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\frac{1}{w - \Phi(\zeta)} d\zeta = -\mathrm{Res}_{\Psi(w)} \frac{1}{\zeta - z}\frac{1}{w - \Phi(\zeta)}$$
Comme Φ est bijective, le zéro de $w - \Phi$ en $\Psi(w)$ est simple et le pôle est donc simple. Le résidu est donc
$$\mathrm{Res}_{\Psi(w)} \frac{1}{\zeta - z}\frac{1}{w - \Phi(\zeta)} = -\frac{1}{\Psi(w) - z}\frac{1}{\Phi'(\Psi(w))}.$$
La formule de la dérivée d'une fonction réciproque permet de conclure pour la première formule.
Pour la deuxième, on développe
$$\frac{1}{w - \Phi(\zeta)} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\Phi(\zeta)^n}{w^{n+1}}.$$
On va intégrer sur le lacet γ_r défini comme l'image réciproque du cercle $|z| = r$, $r > 1$, par Φ, ce qui garantit la convergence uniforme dans la formule ci-dessus pour $|w| \geqslant r + \varepsilon$ pour tout ε. On intègre, et on a
$$\begin{aligned}\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z}\frac{1}{w - \Phi(\zeta)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n \geqslant 0}\int_{\gamma_r} \frac{\Phi(\zeta)^n}{w^{n+1}(\zeta - z)} d\zeta \\ &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}.\end{aligned}$$
qui converge donc uniformément pour $|w| \geqslant 1 + \varepsilon$.

7. Soit γ un chemin C^1 par morceaux dans U qui encercle K : pour $z \in K$, on a
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Par changement de variable $\zeta \to \Psi(\zeta)$, on trouve

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Phi\circ\gamma} f(\Psi(\zeta)) \frac{\Psi'(\zeta)}{\Psi(\zeta) - z} d\zeta$$
$$= \sum_{n\geqslant 0} F_n(z) \int_{\Phi\circ\gamma} \frac{f(\Psi(\zeta))}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Reste à voir la convergence uniforme sur K découle de la convergence uniforme sur K de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$ pour $|w| \geqslant 1+\varepsilon$. Le chemin $\Phi\circ\gamma$ a une image compacte contenue dans $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ et il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $|\zeta| \geqslant 1+\varepsilon$ sur $\Phi\circ\gamma$, ce qui prouve la convergence uniforme.

Exercices divers.

Exercice 5. Une fonction analytique sur le disque.
Soit $r < 1$: pour $n \geqslant m$, $\left(re^{\frac{2ik\pi}{2^m}}\right)^{2^n} = r^{2^n}$ et donc

$$f\left(re^{\frac{2ik\pi}{2^m}}\right) = \sum_{n=0}^{m-1} r^{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{2^{m-n}}} + \sum_{n\geqslant m+1} r^{2^n}.$$

Le premier terme est borné en module par m et le deuxième terme diverge vers $+\infty$ quand $r \to 1$, ce qui prouve que f diverge au voisinage de $e^{\frac{2ik\pi}{2^m}}$.

Exercice 6. Primitives et logarithmes.

1. On écrit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$, qui converge uniformément sur $|z-a| \leqslant \delta$ pour $\delta < \varepsilon$. Ainsi :

$$\int_a^z \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n \int_a^z (z-a)^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

   C'est bien une primitive de f.

2. Soit $b \in U$, $D \subseteq U$ un disque de centre b, sur lequel f est développable en série entière. Comme $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta$ ne dépend que des extrémités de γ, on a

$$\int_a^z f(\zeta)d\zeta = \int_a^b f(\zeta)d\zeta + \int_b^z f(\zeta)d\zeta.$$

   Le premier terme est une constante, et le deuxième terme définit une fonction holomorphe au voisinage de b, qui est une primitive de f sur ce voisinage. Ainsi, $\int_a^z f(\zeta)d\zeta$ définit bien une primitive de f sur U.

3. On doit juste montrer la réciproque, qui est la conséquence de

$$\int_\gamma F'(\zeta)d\zeta = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

4. Dérivons $g(z) = e^{L(z)}/f(z)$.

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} e^{L(z)} \frac{1}{f(z)} - e^{L(z)} \frac{f'(z)}{f(z)^2} = 0.$$

   Ainsi, $e^{L(z)}/f(z) = A$, A constante.

5. Comme deux chemins entre deux points sont toujours homotopes (par définition de la simple connexité), toute fonction holomorphe admet une primitive, en particulier f'/f.

Exercice 7. Formules d'aire.
Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une fonction analytique sur $\mathbb{D}$, qu'on suppose bornée et injective.

1. La différentielle de f en z est la multiplication par $f'(z)$. Un rapide calcul révèle que le déterminant de la multiplication par $a \in \mathbb{C}$ vue comme application $\mathbb{R}$-linéaire est $|a|^2$, dinc le déterminant jacobien de f en z est $|f'(z)|^2$.

2. On applique la formule du changement de variable :
$$\begin{aligned}\int_{f(\mathbb{D})} dxdy &= \int_{\mathbb{D}} |f'(x+iy)|^2 dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{m,n\geqslant 0} n a_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} m \overline{a}_m r^{m-1} e^{-i(m-1)\theta} r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \sum_{m,n\geqslant 0} nm a_n \overline{a}_m r^{m+n-1} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \sum_{n\geqslant 0} n|a_n|^2 r^{2n-1} dr \\ &= \pi \sum_{n\geqslant 1} n|a_n|^2.\end{aligned}$$

On rappelle la formule de Stokes holomorphe-antiholomorphe : pour f, g fonctions C^1 sur K compact à bord C^1 par morceaux, on a
$$\int_{\partial K} f dz + g d\overline{z} = 2i \int_K \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dxdy.$$

3. On applique la formule de Stokes à $f = \overline{z}, g = 0$ et on obtient
$$2i \int_K dxdy = \int_{\partial K} \overline{z} dz$$
qui est précisément l'égalité cherchée.

4. On applique la formule de l'aire à ∂K paramétrée par $z = f(re^{i\theta})$, donc $\overline{z} = \overline{f(re^{i\theta})}$ et $dz = ire^{i\theta} f'(re^{i\theta}) d\theta$. On a donc
$$\begin{aligned}\int_K dxdy &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{i\theta})} f'(re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \overline{a}_n r^n e^{-ni\theta} m a_m r^{m-1} e^{(m-1)i\theta} r e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} m \overline{a}_n a_m r^{m+n} r^{m+n} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta \\ &= \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|a_n|^2 r^{2n}\end{aligned}$$

Exercice 8. Un calcul de somme.

1. Le calcul pour $\tan(x+iy) = \frac{\sin(2x)+i\sinh(2y)}{\cos(2x)+\cosh(2y)}$ est assez laborieux. On peut soit le faire explicitement, en utilisant les formules $\sin(iy) = i\sinh(y)$, $\cos(iy) = \cosh(y)$, et toutes les formules de duplication qui en découlent, soit calculer les dérivées partielles de $\frac{\sin(2x)+i\sinh(2y)}{\cos(2x)+\cosh(2y)}$, vérifier que cette fonction satisfait aux équations de Cauchy-Riemann et vérifier qu'elle coïncide avec la tangente sur $\mathbb{R}$ (moins les pôles). On ne détaille pas les calculs, qui sont longs mais élémentaires.
On déduit de l'expression que si $z = x+iy$ est une solution de l'équation $\tan z = z$ on a $x\sinh(2y) = y\sin(2x)$. Ainsi, si $xy \neq 0$ on a $|y\sin(2x)| < |2xy| < |x\sinh(2y)|$ et l'égalité précédente est impossible. Si $x = 0$ et $y \neq 0$ on a $\tan(iy) = i\tanh y = iy$ ce qui est impossible puisque $|\tanh(y)| > |y|$. Ceci conclut que les racines de $\tan z = z$ sont réelles.

2. Remarquons que $n\pi - \frac{\pi}{2} < \lambda_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$. Le contour carré est donc le contour habituel de sommets $\pm(N\pi + \pi/4) \pm (N + \pi/4)i\pi$, on passe la preuve que $g(z) = \frac{f'(z)}{z^2 f(z)} = \frac{\tan(z)}{z(\tan(z)-z)} = \frac{\sin(z)}{z(\sin(z)-z\cos(z))}$ est un $O(N^{-2})$ sur ce contour.
Reste simplement à calculer les résidus. Les pôles sont 0, qui est un pôle triple, et les $\pm\lambda_n$, qui sont simples. $\frac{f'}{f}$ a un résidu de 1 en $\pm\lambda_n$ car $\pm\lambda_n$ est un zéro simple de f, et donc le résidu de g en $\pm\lambda_n$ est $\frac{1}{\lambda_n^2}$. Pour calculer le résidu en 0, il faut calculer le terme de degré 1 dans le développement en série de Laurent de f'/f, on ne détaillera pas ce calcul, on trouve $-1/5$. En intégrant, on obtient
$$2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{5} + O(N^{-1})$$
et le résultat recherché tombe en prenant $N \to \infty$.

3. Il suffit de refaire la même chose que dans la question précédente, mais avec la fonction $g_k(z) = \frac{f'(z)}{z^{2k} f(z)}$. Les pôles sont toujours des pôles simples aux $\pm\lambda_n$ et un pôle d'ordre $2k+1$ en 0. Le résidu en $\pm\lambda_n$ est $\frac{1}{\lambda_n^{2k}}$ et le résidu en 0 est le coefficient d'ordre $2k-1$ dans le développement en série de Laurent de f'/f au voisinage de 0. Comme f est à coefficients rationnels, f'/f l'est aussi, ce qui conclut.

4. Le fait que $\frac{\sin(az)}{\sin(z)}$ est bornée sur le contour choisi n'est pas immédiat. Calculons
$$|\sin(x+iy)|^2 = |\sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)|^2 = \sin^2(x)\cosh^2(y) + \cos^2(x)\sinh^2(y).$$
En écrivant $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, on trouve
$$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2(x)\cosh^2(y) + \sinh^2(y) - \sin^2(x)\sinh^2(y) = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$$
car $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$. On majore $\frac{\sin(az)}{\sin(z)}$ sur le carré de coins $\pm(N+1/4)\pi \pm i(N+1/4)\pi$: sur les côtés verticaux $z = \pm(N+1/4)\pi + it$, on a
$$\begin{aligned}\frac{|\sin(az)|^2}{|\sin(z)|^2} &= \frac{\sin^2(\pm aN\pi \pm a\pi/4) + \sinh^2(at)}{\sin^2(\pm N\pi \pm \pi/4) + \sinh^2(t)} \\ &\leq \frac{1 + \sinh^2(at)}{\frac{1}{2} + \sinh^2(t)}\end{aligned}$$
qui est bornée sur $\mathbb{R}$.
Similairement, sur les côtés horizontaux, on a $z = t \pm i(N+1/4)\pi$
$$\begin{aligned}\frac{|\sin(az)|^2}{|\sin(z)|^2} &= \frac{\sin^2(at) + \sinh^2(\pm a(N+1/4)\pi)}{\sin^2(\pm t) + \sinh^2(\pm a(N+1/4)\pi)} \\ &\leq \frac{1 + \sinh^2(a(N+1/4)\pi)}{\sinh^2((N+1/4)\pi)}\end{aligned}$$
qui est également borné quand $N \to \infty$.
On a donc $\int_{\gamma_N} \frac{\sin(az)}{\sin(z)} \frac{f'(z)}{z^2 f(z)} dz \to 0$ quand $N \to \infty$, et la somme des résidus de la fonction est donc nulle.
Comme $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z\tan(z)}{\tan(z)-z}$, on a
$$\frac{\sin(az)}{\sin(z)} \cdot \frac{\sin(z)}{z(\sin(z) - z\cos(z))} = \frac{\sin(az)}{z(\sin(z) - z\cos(z))}$$
et ses pôles sont exactement les $\pm\lambda_n$, simples, et 0, triple. Le résidu en λ_n est $\frac{\sin(\lambda_n a)}{\sin(\lambda_n)\lambda_n^2}$, et il faut calculer le résidu en 0. Encore une fois, il s'agit de faire un développement limité. Au dénominateur, on a $\sin(z) - z\cos(z) = -\frac{z^3}{6} + \frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^5}{24} + o(z^6) = \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{30} + o(z^6)$. On se ramène donc à calculer le terme d'ordre 2 dans
$$\frac{z^3 \sin(az)}{\sin(z) - z\cos(z)} = \frac{a - \frac{a^3}{6}z^2 + o(z^3)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{30}z^2 + o(z^3)}.$$

On calcule brutalement

$$\begin{aligned}
\frac{a - \frac{a^3}{6}z^2 + o(z^3)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{30}z^2 + o(z^3)} &= -3\frac{a - \frac{a^3}{6}z^2 + o(z^3)}{1 - \frac{1}{10}z^2 + o(z^3)} \\
&= 3\left(a - \frac{a^3}{6}z^2 + o(z^3)\right)\left(1 - \frac{1}{10}z^2 + o(z^3)\right) \\
&= 3a - \frac{3a}{10}z^2 + \frac{a^3}{2}z^2 + o(z^3) \\
&= \frac{3a - 5a^3}{10}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$2\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\lambda_n a)}{\lambda_n^2 \sin(\lambda_n)} = \frac{5a^3 - 3a}{10}.$$

Exercice 9. Les fonctions hypergéométriques
Pour $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_p) \in \mathbb{C}^p, \boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_q) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0})^q$, on définit

$${}_pF_q\left[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \mid z\right] = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_n}{n! \prod_{i=1}^q (b_i)_n} z^n$$

où $(a)_n = a(a+1)...(a+n-1)$.

1. Si l'un des a_i est entier négatif, $(a_i)_n = 0$ pour $n > -a_i$, et ${}_pF_q$ est alors un polynôme. Dans le cas contraire, on applique le critère de d'Alembert. Si l'on note $\gamma_n = \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_n}{n! \prod_{i=1}^q (b_i)_n}$, le quotient γ_n/γ_{n+1} est, en vertu de l'équation $(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$, donné par

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} = \frac{(n+1)(b_1+n)\cdots(b_q+n)}{(a_1+n)\cdots(a_p+n)}.$$

   On voit clairement que si $p = q+1$, ce quotient converge vers 1. Si $p > q+1$, il converge vers 0 et si $p < q+1$, il diverge vers l'infini. Le rayon de convergence de la fonction hypergéométrique associée est donc 1 si $p = q+1$, 0 si $p > q+1$ et ∞ si $p < q+1$.

2. $$\exp(z) = {}_0F_0[z], \quad \frac{1}{1-z} = {}_1F_0[1 \mid z], \quad -\log(1-z) = {}_2F_1[1,1;2 \mid z].$$

   La dernière est légèrement plus délicate à exprimer. Elle s'écrit sous la forme

$$\int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

   On peut exprimer $2n+1$ comme $\frac{(3/2)_n}{(1/2)_n}$, et donc

$$\int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta = z\, {}_1F_1\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \,\middle|\, z\right]$$

3. C'est une conséquence directe de

$$\partial_z \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} n a_n z^{n-1}.$$

4. Pour le premier claim, il suffit de vérifier que $P(\theta_z)\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} P(n) a_n z^n$.
   Par linéarité, il suffit de vérifier que $\theta_z^k \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} n^k a_n z^n$, qui découle de la question précédente.
   On utilise alors le fait que les coefficients $(\gamma_n)_n$ vérifient

$$n(n+b_1-1)\cdots(n+b_q-1)\gamma_n = (n+a_1-1)\cdots(n+a_p-1)\gamma_{n-1}$$

toujours par la relation $(a)_n = (a+n-1)(a)_{n-1}$. On applique donc la première partie de la question avec $P(t) = t(t+b_1-1)\cdots(t+b_q-1)$ et $Q(t) = (t+a_1)\cdots(t+a_p)$, et donc pour y la fonction hypergéométrique, on a

$$\theta_z(\theta_z+b_1-1)...(\theta_z+b_q-1)y(z) = z(\theta_z+a_1)...(\theta_z+a_p)y(z).$$

5. On pourrait utiliser la formule $(1-z)^{-\alpha} = \exp(-\alpha\log(1-z))$, mais le processus de la développer serait très laborieux. On peut être plus ingénieux.se et remarquer que $y(z) = (1-z)^{-\alpha}$ vérifie $y'(z) = \frac{\alpha}{1-z}y(z)$. En écrivant $y(z) = \sum a_n z^n$, l'équation différentielle se réécrit

$$\sum_{n\geqslant 0} na_n z^{n-1} - na_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} \alpha a_n z^n$$

ou encore

$$\sum_{n\geqslant 0}((n+1)a_{n+1} - na_n)z^n = \sum_{n\geqslant 0} \alpha a_n z^n$$

et donc $(n+1)a_{n+1} - na_n = \alpha a_n$. On vérifie que cette relation de récurrence, avec $a_0 = 1$, donne $a_n = \frac{(\alpha)_n}{n!}$.

On passe à la formule intégrale. On développe en série entière dans l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{(a)_n}{n!}\left(\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}t^n dt\right)z^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{(a)_n}{n!}\cdot\frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)}z^n.\end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise le fait que $\Gamma(b+n) = (b)_n\Gamma(b)$ et $\Gamma(c+n) = (c)_n\Gamma(c)$.

6. On calcule

$$\begin{aligned}(1-z)^{-a}\int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{c-b-1}\left(1-\frac{z}{z-1}t\right)^{-a}dt &= \int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}(1-z+zt)^{-a}dt \\ &= \int_0^1 (1-u)^{c-b-1}u^{b-1}(1-zu)^{-a}du\end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = 1-t$.